Les puissances

Fiche relue en 2016.

1. Puissances d'un nombre relatif

a) Exposant positif

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1 , et a un nombre relatif. On a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs } a}$$

a^n se dit « a à la puissance n » ou « a puissance n » ou « a exposant n ».
n se nomme **l'exposant**.

Exemples :
5^3 = 5 x 5 x 5 = 125
$(-2)^5$ = (-2) x (-2) x (-2) x (-2) x (-2) = -(2 x 2 x 2 x 2 x 2)
= -32

Remarques :
D'après la règle des signes, la **puissance d'un nombre négatif** est un nombre **positif si l'exposant est pair**, c'est un nombre **négatif si l'exposant est impair**.

Si l'exposant est **1 :** a^1 **= a**
a puissance **2** se dit a au **carré**.
a puissance **3** se dit a au **cube**.

b) Exposant négatif

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1, et a un nombre relatif.

a^{-n} est l'inverse de a^n

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \ldots \times a}$

Avec n facteurs au dénominateur

Exemples :
$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$

$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{(-2) \times (-2)} = \frac{1}{4}$

c) Exposant nul

Soit a un nombre relatif différent de 0
$a^0 = 1$

On admet qu'**un nombre non nul à la puissance 0 est toujours 1**.
a^3 = a x a x a
a^2 = a x a
a^1 = a
Pour passer d'une ligne à l'autre et descendre les exposants, cela revient à diviser par a.

D'où : $a^0 = \frac{a}{a} = 1$

2. Opérations sur les puissances

Soit a et b des **nombres relatifs différents de 0** et m et n des **entiers relatifs**.

Opération	Propriété	Exemples
Produit	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$5^3 \times 5^4 = 5^{(3+4)} = 5^7 3^2 \times 3^{-4} = 3^{(2-4)} = 3^{-2}$
Quotient	$\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$	$\frac{6^4}{6^7} = 6^{(4-7)} = 6^{-3} \frac{2^{-3}}{2^{-7}} = 2^{(-3-(-7))} = 2^4$
Puissance de puissance	$(a^n)^m = a^{(n \times m)}$	$(2^3)^4 = 2^{(2\times4)} = 2^{12} (3^{-2})^5 = 3^{(-2\times5)} = 3^{-10}$
Puissance d'un produit	$(ab)^n = a^n \times b^n$	$(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 (3 \times 4)^{-3} = 3^{-3} \times 4^{-3}$
Puissance d'un quotient	$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(\frac{2}{3})^4 = \frac{2^4}{3^4} (\frac{3}{4})^{-3} = \frac{3^{-3}}{4^{-3}}$

3. Les puissances de 10

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 1.
On a :
$10^n = 10 \times 10 \times ... \times 10 = 100...0$
n facteurs 10 1 suivi de n zéros.

$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,00..01$
0 virgule, (n-1) zéros suivis de 1

Exemples :
$10^7 = 10000000$
$10^{-5} = 0,00001$

Les propriétés des opérations du précédent paragraphe s'appliquent pour a=10

Produit	Quotient	Puissance
$10^n \times 10^m = 10^{(n+m)}$	$\frac{10^n}{10^m} = 10^{(n-m)}$	$(10^n)^m = 10^{(n\times m)}$

4. Écriture scientifique d'un nombre relatif

L'écriture scientifique d'un nombre relatif a est une mise sous la forme :
$a = b \times 10^n$

Avec b nombre relatif dont la distance à 0 est supérieure ou égale à 1, et inférieure à 10.Le nombre n est un entier relatif.

Exemples :
L'écriture scientifique de 2 451 500 est $2,4515 \times 10^6$
L'écriture scientifique de -0,000 15 est $-1,5 \times 10^{-4}$

L'écriture scientifique permet de voir rapidement l'ordre de grandeur d'un nombre sans avoir à compter les chiffres avant ou après la virgule. De plus, on peut vite se faire une idée du résultat d'un calcul grâce aux propriétés des opérations sur les puissances.