Comparaison de nombres relatifs, inégalités

Fiche relue en 2016

1 - Comparaison de deux nombres relatifs

Soient a et b deux nombres relatifs :

- Si a - b > 0, alors a > b
- Si a - b = 0, alors a = b
- Si a - b < 0, alors a < b

Pour **comparer deux nombres**, on peut donc étudier le **signe de leur différence**.

Exemple :

$\frac{10}{7}$ est-il plus grand que $\frac{5}{3}$?

On calcule $\frac{10}{7} - \frac{5}{3}$

$\frac{10}{7} - \frac{5}{3} = \frac{10 \times 3}{7 \times 3} - \frac{5 \times 7}{3 \times 7} = \frac{30}{21} - \frac{35}{21} = \frac{30 - 35}{21} = \frac{-5}{21}$

$\frac{10}{7} - \frac{5}{3} < 0$ donc $\frac{10}{7} < \frac{5}{3}$

Conclusion : $\frac{10}{7}$ est plus petit que $\frac{5}{3}$.

2 - Ordre et opérations

a) Ordre avec l'addition et la soustraction

L'addition ou la soustraction de deux nombres avec le même nombre ne changent pas l'ordre.

Soient a, b et c trois nombres relatifs :

- Si **a** > **b**, alors **a + c** > **b + c** et **a - c** > **b - c**
- Si **a** < **b**, alors **a + c** < **b + c** et **a - c** < **b - c**

Exemples :

1) Si $x - 7 > -2$ alors $x - 7 + 7 > -2 + 7$ donc $x > 5$
2) Si $2 - x \leqslant 4$ alors $2 - x + x \leqslant 4 + x$
soit $2 \leqslant 4 + x$ alors $2 - 4 \leqslant 4 + x - 4$ soit $-2 \leqslant x$ c'est-à-dire $x \geqslant -2$

Conclusion : Si $2 - x \leqslant 4$ alors $x \geqslant -2$.

b) Ordre avec la multiplication

La **multiplication** de deux nombres avec le même nombre **strictement positif ne change pas l'ordre**.
La **multiplication** de deux nombres avec le même nombre **strictement négatif inverse l'ordre**.

Soient a, b et c trois nombres relatifs :
- Si **a** $>$ **b et c** $>$ **0**, alors **ac** $>$ **bc**
- Si **a** $<$ **b et c** $>$ **0**, alors **ac** $<$ **bc**
- Si **a** $>$ **b et c** $<$ **0**, alors **ac** $<$ **bc**
- Si **a** $<$ **b et c** $<$ **0**, alors **ac** $>$ **bc**

Exemples :

1) Si $3x \geqslant 12$ alors $3x \times \frac{1}{3} \geqslant 12 \times \frac{1}{3}$ soit $\frac{3x}{3} \geqslant \frac{12}{3}$ c'est-à-dire $x \geqslant 4$

2) Si $7x > -4$ alors $7x \times \frac{1}{7} > -4 \times \frac{1}{7}$ soit $\frac{7x}{7} > \frac{-4}{7}$ c'est-à-dire $x > -\frac{4}{7}$

3) Si $-4x \geqslant 8$ alors $-4x \times (-\frac{1}{4}) \leqslant 8 \times (-\frac{1}{4})$ (on inverse le signe $\geqslant$ en $\leqslant$ car on multiplie les membres de l'inégalité par $-\frac{1}{4}$ qui est un nombre négatif)

On a donc : $\frac{-4x \times (-1)}{4} \leqslant \frac{8 \times (-1)}{4}$ soit $x \leqslant -2$

Conclusion : Si $-4x \geqslant 8$ alors $x \leqslant -2$

3 - Encadrement d'un nombre à partir d'une valeur approchée

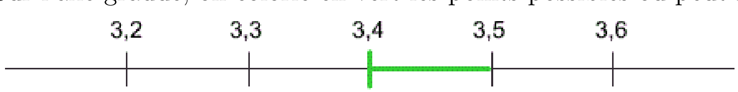
a) A partir d'une troncature

Une **troncature** d'un nombre décimal est obtenue en supprimant ses décimales à partir d'un certain rang.

Exemples :
5,4 est la troncature au dixième de 5,456108
0,33 est la troncature au centième de $\frac{1}{3}$

On peut donner un encadrement d'un nombre dont on connaît une troncature.

Exemples :
a est un nombre dont la troncature au dixième est 3,4
Sur l'axe gradué, on colorie en vert les points possibles où peut se trouver a :



Ceci ce traduit par l'inégalité $3,4 \leqslant a < 3,5$

De même, si un nombre b a 1,10 comme troncature au centième, on déduit que$1,10 \leqslant a < 1,11$

b) A partir d'un arrondi

Un **arrondi** d'un nombre décimal est le nombre décimal le plus proche comportant un nombre de décimales choisi.

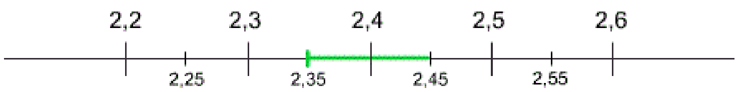
Exemples :

5,1 est l'arrondi au dixième de 5,14212
5,2 est l'arrondi au dixième de 5,1675
0,67 est l'arrondi au centième de $\dfrac{2}{3}$

On peut donner un encadrement d'un nombre dont on connaît un arrondi.

Exemples :

c est un nombre dont l'arrondi au dixième est 2,4
Sur l'axe gradué, on colorie en vert les points possibles où peut se trouver c :



Ceci ce traduit par l'inégalité $2,35 \leqslant c < 2,45$

De même, si un nombre d a 1,10 comme arrondi au **centième**, on déduit que $1,095 \leqslant d < 1,105$