Cours : inéquations - systèmes d'équations

1 Inégalité et opération

Propriété : ordre et addition

Si on ajoute (ou on soustrait) un même nombre aux deux membres d'une inégalité, on ne change pas le sens de l'inégalité.

Quels que soient les nombres a,b et c.

Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$

Si $a \leq b$ alors $a - c \leq b - c$

Exemple : si $m \leq p$ alors $m + 6 \leq p + 6$ et $m - 2 \leq p - 2$

Propriété : ordre et multiplication

Si on multiplie (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre **positif**, on ne change pas le sens de l'inégalité.

Quels que soient les nombres a,b et c.

Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$

Si $a \leq b$ et $c > 0$ alors $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$

Si $a \leq b$ et $c < 0$ alors $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

Exemples :

Si $3x \leq -18$ alors $x \leq -\frac{18}{3}$ soit $x \leq -6$

Si $-2x < 4$ alors $x > \frac{4}{-2}$ soit $x > -2$ (changement de sens de l'inégalité).

2 Inéquation

Définition

Une inégalité telle que : $5x + 7 > 4$ où figure un nombre inconnu désigné par une lettre s'appelle une **inéquation**.

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles l'inégalité est vraie.
Les valeurs trouvées sont les **solutions** de l'inéquation.

Exemple : soit l'inéquation $3x + 6 \geq x + 7$.
3 est une solution de l'inéquation car $3 \times 3+6 \geq 3 + 7$ ($15 \geq 10$)

Résolution d'une inéquation

Quatre règles permettent de transformer une inéquation en une inéquation qui a les mêmes solutions :

- Simplifier chacun des membres de l'inéquation
- Ajouter (ou soustraire) le même nombre aux deux membres de l'inéquation
- Multiplier (ou diviser) par un même nombre positif non nul les deux membres de l'inéquation
- Multiplier (ou diviser) par un même nombre négatif non nul les deux membres de l'inéquation à condition **de changer le sens de l'inégalité.**

Exemple :

Résoudre l'inéquation : $-4x + 3 < 8$

$-4x + 3 - 3 < 8 - 3$ On soustrait 3 aux deux membres de l'inégalité.

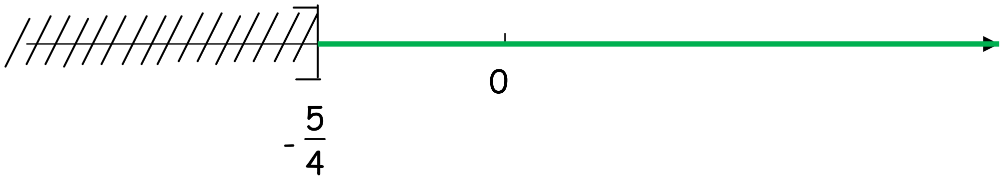
$-4x < 5$

$x > -\frac{5}{4}$ On divise par –4 en changeant le signe de l'inégalité.

Les solutions de l'inéquation $- 4x + 3 < 8$ sont les nombres supérieurs à $-\frac{5}{4}$.

<u>Représentation graphique</u> :

On peut représenter les solutions sur une droite graduée.



3 Equation à deux inconnues

$3x + 2y = 8$ est une équation a deux inconnues x et y.

Un couple de nombre $(x\,;y)$ est solution de cette équation si on a effectivement $3x + 2y = 8$.

Exemples :

$(2\,;1)$ est une solution car $3 \times 2 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$
$(1\,;2)$ n'est pas solution car $3 \times 1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$
$(0\,;4)$ est aussi une solution car $3 \times 0 + 2 \times 4 = 8$

On peut ajouter, soustraire, multiplier, diviser par le même nombre chaque membre de l'équation. On obtient une équation dite équivalente qui a les mêmes solutions.

Exemples :

$3x + 2y = 8$ est équivalente à $3x = 8 - 2y$

$x = \frac{8 - 2y}{3}$ On a exprimé x en fonction de y.

$y = \frac{8 - 3x}{2}$ ou $y = 4 - \frac{3}{2}x$

On a exprimé y en fonction de x (on trouve ainsi une application affine de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$, d'ordonnée à l'origine 4).

Il existe donc une infinité de solutions a une équation à deux inconnues. A chaque choix de x correspond un y calculé par la formule $y = 4 - \frac{3}{2}x$

4 Système d'équations à deux inconnues

$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

Un couple de nombres est solution du système s'il est solution des deux équations à la fois.

Exemple :

(2 ;1) est une solution de $3x + 2y = 8$ mais pas de $x - 5y = 2$ car $2 - 5 \times 1 = -3$ donc (2 ;1) n'est pas une solution du système.

5 Résolution d'un système

Pour résoudre un système on peut utiliser des équations équivalentes.

<u>Méthode par substitution</u>

Dans l'une des deux équations on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. On choisit l'équation et l'inconnue qui permettent de faire des calculs « simples ». Ici la deuxième inconnue, et x en fonction de y.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

On remplace alors dans la première équation x par l'expression trouvée dans la seconde.

$$\begin{cases} 3(2 + 5y) + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

On résout la première équation qui n'a plus qu'une seule inconnue.

$$\begin{cases} 6 + 15y + 2y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} 6 + 17y = 8 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} 17y = 8 - 6 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} 17y = 2 \\ x = 2 + 5y \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{17} \\ x = 2 + 5y \end{cases}$$

On remplace ensuite, dans la seconde équation, y par $\frac{2}{17}$.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{17} \\ x = 2 + 5\times\frac{2}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{2}{17} \\ x = \frac{34 + 10}{17} = \frac{44}{17} \end{cases}$$

On vérifie alors que le couple $\left(\frac{44}{17}; \frac{2}{17}\right)$ est bien une solution des deux équations :

$$3\times\frac{44}{17} + 2\times\frac{2}{17} = \frac{3\times44 + 2\times2}{17} = \frac{136}{17} = 8$$

$$\frac{44}{17} - 5\times\frac{2}{17} = \frac{44 - 10}{17} = \frac{34}{17} = 2$$

On conclut par une phrase : $\left(\frac{44}{17}; \frac{2}{17}\right)$ est le couple solution du système.

<u>Méthode par combinaisons</u>

Souvent utilisée quand l'expression d'une inconnue en fonction d'une autre n'est pas «simple».

$$\begin{cases} 5x + 7y = 17 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

On utilise des équations équivalentes pour que les coefficients de x(ou de y) soient opposés dans les deux équations.
Ici on peut multiplier les membres de la première équation par 3 et ceux de la seconde par -5.

$$\begin{cases} (5x + 7y)\times3 = 17\times3 \\ (3x + 2y)\times(-5) = 8\times(-5) \end{cases} \qquad \begin{cases} 15x + 21y = 51 \\ -15x - 10y = -40 \end{cases}$$

On ajoute au premier membre de la première équation le premier membre de la seconde équation ; même chose avec le second membre.
Ainsi on obtient une équation sans l'inconnue x.
On utilise une des deux équations de départ pour conclure.

$$\begin{cases} 15x + 21y - 15x - 10y = 51 - 40 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11y = 11 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{11}{11} = 1 \\ 3x + 2\times1 = 8 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3x = 8 - 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{6}{3} = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

On vérifie :

$5 \times 2 + 7 \times 1 = 10 + 7 = 17$ et $3 \times 2 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$

(2 ;1) est le couple solution du système.

<u>Interprétation graphique</u>

On considère le système $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$.

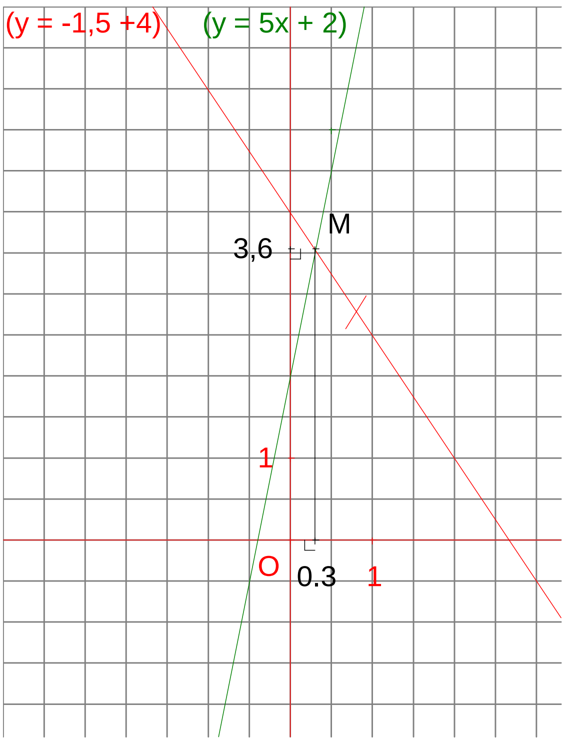
En exprimant y en fonction de x dans chacune des équations on obtient :

$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2}x + 4 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$

Ce qui correspond à deux fonctions affines f et g définies par $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + 4$ et $g(x) = 5x + 2$.

On trace leurs représentations graphiques qui sont des droites dans un repère.

Le couple solution du système correspond aux coordonnées du point d'intersection des deux droites.



Par lecture graphique des coordonnées du point d'intersection M, on obtient une solution <u>approchée</u> du système : (0,3 ;3,6).

On peut montrer en résolvant algébriquement le système que le couple solution est $\left(\dfrac{4}{13} ; \dfrac{46}{13}\right)$.