Nombres entiers et rationnels

I Divisibilité

a) Division euclidienne

Définition a et b désignent des nombres entiers avec $b \neq 0$.

Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver le **quotient** q et le reste r tel que :

$$a = b \times q + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

Exemple : division euclidienne de 652 par 24.

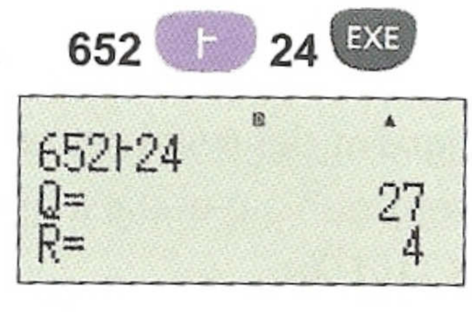
A la main

dividende diviseur

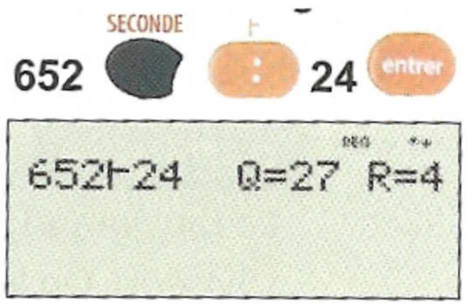
```
  6 5 2 | 2 4
- 4 8   | 2 7  ← quotient
  1 7 2 |
- 1 6 8 |
reste → 4
```

$652 = 24 \times 27 + 4$ et $0 \leq 4 < 24$

Avec Casio fx-92 Collège 2D+



Avec TI-Collège Plus



Nombres entiers et rationnels

b) Diviseurs et multiples

Définition a et b désignent des nombres entiers avec $b \neq 0$.

Dire que **b est un diviseur de a** signifie que le reste de la division euclidienne de a par b est nul c'est-à-dire que :

$$\mathbf{a = b \times q \text{ avec } q \text{ nombre entier.}}$$

Vocabulaire : On dit aussi que **b divise a** ou que **a est divisible par b** ou que **a est un multiple de b**.

Exemple : liste des diviseurs de 80.

On essaie les nombres entiers dans l'ordre croissant.

$1 \times 80 = 80$
$2 \times 40 = 80$
$4 \times 20 = 80$
$5 \times 16 = 80$
$8 \times 10 = 80$

On s'arrête là car 9 ne divise pas 80 et 10 est déjà écrit.

Les diviseurs de 80 sont donc : 1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80.

Remarques :

- $2{,}5 \times 32 = 80$, mais 32 n'est pas un diviseur de 80 car 2,5 n'est pas un nombre entier.
- Tout nombre entier non nul est au moins divisible par 1 et lui-même.

c) Critères de divisibilité

Propriétés

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8 alors il est divisible par 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, alors il est divisible par 10.

II Diviseurs communs à deux nombres entiers

a) Diviseurs communs

Définition a, b et k désignent des nombres entiers avec $k \neq 0$.

Dire que k est **un diviseur commun** à a et b signifie que k divise **à la fois** a et b.

Exemples :

- 2 est un diviseur commun à 12 et 38 ($2 \times 6 = 12$ et $2 \times 19 = 38$).
- 5 est un diviseur commun à 15 et 30 ($5 \times 3 = 15$ et $5 \times 6 = 30$).

b) PGCD

Définition a et b désignent des nombres entiers non nuls.

Le plus grand diviseur commun à a et b est appelé le PGCD de a et b (Plus Grand Commun Diviseur)

Exemple : PGCD de 36 et 24.

Les diviseurs de 24 sont 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24.

Les diviseurs de 36 sont : 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36.

Parmi les diviseurs communs (1; 2; 3; 4; 6; 12), le plus grand est 12.

Donc PGCD(36;24) = 12.

c) Nombres premiers entre eux

Définition

Dire que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** signifie que **1 est leur seul** diviseur commun.

Dire que deux nombres entiers a et b sont premiers entre eux revient à dire que PGCD(a;b) = 1.

Exemple :

Les diviseurs de 16 sont 1; 2; 4; 8; 16. Les diviseurs de 9 sont 1; 3; 9.
Ainsi 1 est le seul diviseur commun à 16 et 9, donc 16 et 9 sont premiers entre eux.

III Algorithme de calcul du PGCD

Algorithme d'Euclide ou des divisions successives

Propriété (admise)

a et b désignent des nombres entiers non nuls avec $a > b$.

PGCD(a; b) = PGCD(b; r) où r est le reste de la division euclidienne de a et b.

Exemple : PGCD de 75 et 40.

Dividende	Diviseur	Reste
75	40	35
40	35	5
35	5	0

$75 = 1 \times 40 + 35$

$40 = 1 \times 35 + 5$

$35 = 5 \times 7 + 0$

Le PGCD est le dernier reste non nul.

Donc PGCD(75;40) = 5

IV Fractions irréductibles

a) Nombres rationnels

Définition

Dire qu'un nombre est **rationnel** signifie que ce nombre peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b nombres **entiers relatifs**. ($b \neq 0$).

- Tout nombre entier relatif est un nombre rationnel. Par exemple : $-5 = \frac{-5}{1}$.
- Tout nombre décimal est un nombre rationnel. Par exemple : $2{,}15 = \frac{215}{100}$.
- Tout quotient de nombres décimaux (non nuls) est un nombre rationnel.

  Par exemple : $\frac{0{,}5}{0{,}7} = \frac{5}{7}$

Remarque : On sait démontrer que π ou $\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres rationnels.

b) Fractions irréductibles

Définition

Dire qu'une fraction est **irréductible** signifie que son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Une fraction irréductible ne peut plus être simplifiée.

Exemple : $\frac{16}{9}$ est une fraction irréductible car 16 et 9 sont premiers entre eux.

Remarque : Tout nombre rationnel admet une écriture fractionnaire irréductible de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b nombres entiers ($b \neq 0$).

c) Rendre une fraction irréductible

Propriété (admise)

Si on simplifie une fraction par le PGCD de son numérateur et de son dénominateur, alors on obtient la fraction irréductible qui lui est égale.

En pratique, pour rendre une fraction irréductible, soit on utilise les critères de divisibilité, soit on le fait en une seule étape avec la propriété ci-dessus.

Exemple : Comme PGCD(36;24) = 12, alors $\frac{36}{24} = \frac{3 \times 12}{2 \times 12} = \frac{3}{2}$.

Et $\frac{3}{2}$ est une fraction irréductible.