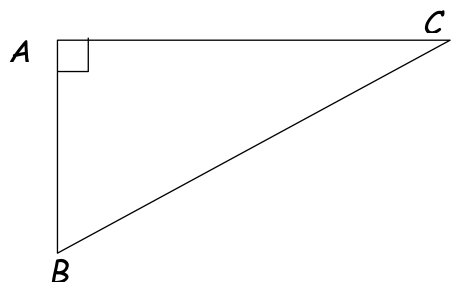
cours trigonométrie

I - Rappel : cosinus d'un angle aigu

a) Vocabulaire :

Soit ABC un triangle rectangle en A.
Le côté opposé (face) à l'angle droit est l'hypoténuse. Ici c'est [BC]



Si on s'intéresse à l'angle $\widehat{B}$:

Le côté opposé à l'angle $\widehat{B}$ est [AC].

Le côté adjacent à l'angle $\widehat{B}$ est [AB].

Si on s'intéresse à l'angle $\widehat{C}$:

Le côté opposé à l'angle $\widehat{C}$ est [AB].

Le côté adjacent à l'angle $\widehat{C}$ est [AC].

Remarque : $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$

b) Formule :

$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{C}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

Remarque : Comme l'hypoténuse est le plus grand côté, le cosinus d'un angle est toujours plus petit que 1.

c) Exemples :

Exemple 1

Soit EFG rectangle en E tel que $\widehat{G} = 35°$ et FG = 5 cm. Calculer EG.

Dans le triangle EFG rectangle en E, on a $\cos \widehat{G} = \frac{EG}{FG}$

Soit $\cos 35° = \frac{EG}{5}$

D'où : $EG = 5 \times \cos 35°$

A l'aide de la calculatrice, on obtient $EG \approx 4{,}1$ cm

Exemple 2

Soit STU rectangle en S tel que $\hat{U}$ = 65° et US = 3 cm. Calculer UT.

Dans le triangle STU rectangle en S, on a $\cos \widehat{U} = \dfrac{SU}{UT}$

Soit $\cos 65° = \dfrac{3}{UT}$

D'où : $UT = \dfrac{3}{\cos 65°}$

A l'aide de la calculatrice, on obtient UT $\approx$ 7,1 cm

Exemple 3

a) Soit XYZ rectangle en X tel que XZ = 4 cm et YZ = 6 cm. Calculer $\widehat{Z}$.

Dans le triangle XYZ rectangle en X, on a :

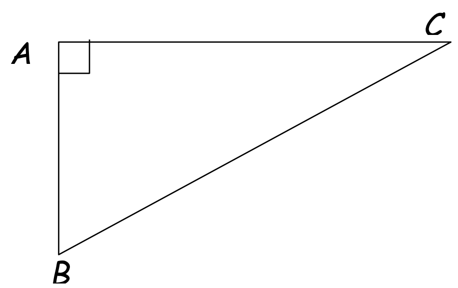
$\cos \widehat{Z} = \dfrac{XZ}{YZ} = \dfrac{4}{6}$

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $\widehat{Z} \approx 48{,}2$ °

II - Relations trigonométriques dans le triangle rectangle :

a) Formules :

Soit ABC un triangle rectangle en A.



$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{B}}{\text{côté adjacent à } \widehat{B}} = \frac{AC}{AB}$$

Remarque : Il y a un moyen pour se souvenir facilement de la formule :

S O H	C A H	T O A
$\sin = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$	$\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	$\tan = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$

b) Exemples (on donnera des valeurs approchées à 0,1 près) :

Exemple 1 :
Soit IJK rectangle en K tel que IJ = 8 cm et $\hat{I}$ = 50°. Calculer KJ.

Dans le triangle IJK rectangle en K, on a :

$\sin \widehat{I} = \frac{KJ}{IJ}$ KJ = (sin 50°) x 8 ≈ 6,13 cm

Exemple 2
Soit LMN rectangle en N tel que LN = 6,5 cm et NM = 3 cm.
Calculer $\widehat{M}$ puis $\widehat{L}$.

Dans le triangle LMN rectangle en N, on a :

$$\tan \widehat{M} = \frac{LN}{MN} = \frac{6,5}{3} \qquad \text{d'où } \widehat{M} \approx 65,2\,°$$

$$\tan \widehat{L} = \frac{MN}{LN} = \frac{3}{6,5} \qquad \text{d'où } \widehat{L} \approx 24,8\,°$$

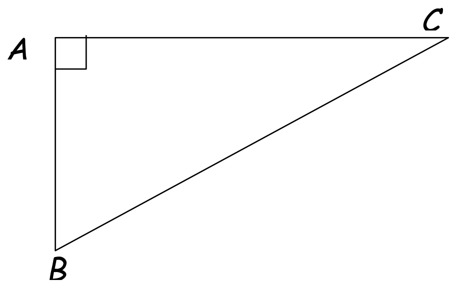
On vérifie que $\widehat{L} + \widehat{M} = 90°$

Exemple 3
Soit OPQ rectangle en O tel que OP = 5 cm et QP = 7 cm. Calculer $\widehat{Q}$.

Dans le triangle OPQ rectangle en O, on a :

$$\sin \widehat{Q} = \frac{OP}{PQ} = \frac{5}{7} \qquad \widehat{Q} \approx 45,6°$$

III - Formules et valeurs remarquables :



a) Formules

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$(\cos \widehat{B})^2 = \frac{AB^2}{BC^2} \qquad (\sin \widehat{B})^2 = \frac{AC^2}{BC^2}$$

D'où : $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$

Or le triangle ABC étant rectangle en A, l'égalité de Pythagore qui lui est associée s'écrit :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

On en déduit que : $(\cos \widehat{B})^2 + (\sin \widehat{B})^2 = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$

Conclusion : pour tout angle aigu dont la valeur en degré est x, on a :

$$\boxed{(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1}$$

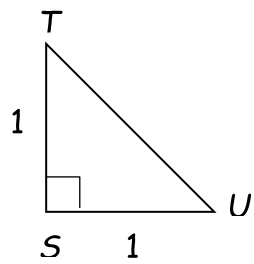
D'autre part, $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{BC} \times \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}}$

Conclusion : pour tout angle aigu dont la valeur en degré est x, on a : $\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$

b) Valeurs remarquables :

- Soit STU un triangle rectangle isocèle en S tel que ST = 1.

  Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{TUS}$?
  En utilisant le théorème de Pythagore, calculer TU.
  En déduire les valeurs exactes de cos 45° ,sin 45°.et tan 45°.



$\widehat{TUS} = \widehat{STU} = \frac{90°}{2} = 45°$

$TU^2 = ST^2 + SU^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ => $TU = \sqrt{2}$

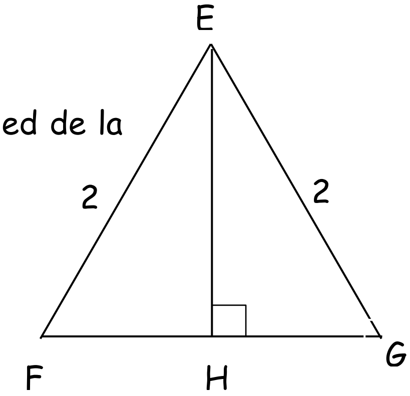
$\cos(\widehat{STU}) = \frac{ST}{TU} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\widehat{STU}) = \frac{SU}{TU} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(\widehat{STU}) = \frac{SU}{ST} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad \tan 45° = 1$

- Soit EFG un triangle équilatéral de côté 2 et H le pied de la hauteur issue de E.

  Quelles sont les mesures des angles $\widehat{EFH}$ et $\widehat{FEH}$?
  Exprimer en fonction de a les longueurs FH et EH.



$\widehat{EFH} = 60°$ puisque dans un triangle équilatéral les angles mesurent 60°.

(EH) est aussi la bissectrice de $\widehat{FEG}$.

Donc $\widehat{EFH} = \frac{60°}{2} = 30°$

$FH = \frac{FG}{2} = \frac{2}{2} = 1$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle EFH rectangle en H, on a :

$$EF^2 = FH^2 + EH^2$$

Soit : $2^2 = 1^2 + EH^2$

Donc $EH^2 = 4 - 1 = 3$ et $EH = \sqrt{3}$

En utilisant les angles de mesures 30° et 60° et les relations de trigonométrie dans le triangle rectangle EFH, on peut calculer les valeurs exactes de cos 30°, sin 30°, tan 30°, cos 60°, sin 60° et tan 60°.

Exemples :

- $\cos \widehat{FEH} = \frac{EH}{EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où : $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan \widehat{EFH} = \frac{EH}{FH} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ d'où : $\tan 60° = \sqrt{3}$

Tableau récapitulatif :

Angle	**30°**	**45°**	**60°**
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$