Cours : Probabilité

I Vocabulaire

Définitions :

- Un phénomène dont on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat, ou l'**issue**, s'appelle une **expérience aléatoire**.
- Les résultats ou issues possibles d'une expérience aléatoire sont appelées **éventualités**.
- Un **évènement** est un ensemble d'éventualités. Un événement est réalisé lorsque l'une des éventualités qui le compose est réalisée.
- Une éventualité est un **événement élémentaire**.

Exemple :

« Jeter un dé » est une expérience aléatoire. On ne peut pas savoir le numéro de la face supérieure qui va apparaître, les issues possibles sont 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6.
Les éventualités sont 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6.
On peut définir l'événement M : « obtenir un multiple de 3 ».
L'événement M est constitué des éventualités 3 et 6.

Définition :

Si A désigne un événement, on appelle « non A » ou $\overline{A}$ (on lit « A barre ») l'**événement contraire** de A, c'est-à-dire l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.

Exemple :

Soit M l'événement : « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.
L'événement contraire de M est $\overline{M}$ l'événement « ne pas obtenir un multiple de 3 ».

II Probabilité

Définition :
Quand une expérience est répétée un grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un événement élémentaire se rapproche d'une valeur particulière : la **probabilité** de cet événement élémentaire.

Exemples :

- La probabilité d'obtenir « pile » lors du jet d'une pièce est égale à $\frac{1}{2}$ ou 0,5.

- Dans un collège, on a interrogé les élèves sur le nombre d'enfants dans leur famille.

Nombre	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	18	25	20	11	5	3
Fréquence	21,95%	30,49%	24,39%	13,41%	6,10%	3,66%

On choisit un élève au hasard dans le collège.
La probabilité pour que cet élève appartienne à une famille de trois enfants est approchée par la fréquence correspondante, soit $\frac{24{,}39}{100}$ ou 0,2439.

Propriétés :

- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des éventualités qui la composent.
- La probabilité d'un événement qui se produit nécessairement (événement certain) est égale à 1.
- La probabilité d'un événement qui ne peut pas se produire (événement impossible) est égale à 0.
- Quel que soit l'événement A, on a : $0 \leq p(A) \leq 1$.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

Exemple :

Dans l'expérience du jeu de dé à 6 faces, on appelle :
A l'événement élémentaire : « obtenir un 1 » B l'événement élémentaire : « obtenir un 2 »
C l'événement élémentaire : « obtenir un 3 » D l'événement élémentaire : « obtenir un 4 »
E l'événement élémentaire : « obtenir un 5 » F l'événement élémentaire : « obtenir un 6 »

- Chaque face a la même chance d'apparition, donc :

$p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = p(E) = p(F) = \frac{1}{6}$.

- On a : $p(A) + p(B) + p(C) + p(D) + p(E) + p(F) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$
- Soit l'événement M "obtenir un multiple de 3". L'événement M est réalisé si la face obtenue est 3 ou 6.

  On a alors : $p(M) = p(C) + p(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Définition :
Si tous les événements élémentaires ou éventualités d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables** ou qu'il y a **équiprobabilité**.

Propriété :
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

Exemple :
Soit l'événement M « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.

- Toutes les faces ayant la même chance d'apparition, il y a équiprobabilité.
- L'événement M est constitué de deux événements élémentaires, il y a 2 cas favorables pour réaliser M sur 6 cas possibles. Donc $p(M) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Propriété :
La probabilité de $\overline{A}$, l'événement contraire de A, est le complément à 1 de la probabilité de A.
On a : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple :
Soit l'événement M « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.
L'événement $\overline{M}$ est : « ne pas obtenir un multiple de 3 » ou encore « obtenir 1, 2, 4 ou 5 ».
Pour réaliser l'événement $\overline{M}$, il y a 4 cas favorables équiprobables, donc $p(\overline{M}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On a aussi $p(\overline{M}) = 1 - p(M)$, donc $p(\overline{M}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.