

COURS : EQUATIONS ET INÉQUATIONS

Extrait du programme de la classe de Troisième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
<p>Équations et inéquations du 1er degré</p> <p>Ordre et multiplication</p> <p>Inéquation du premier degré à une inconnue</p> <p>Résolution de problèmes du premier degré ou s'y ramenant</p>	<p>Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.</p> <p>Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques. Représenter ses solutions sur une droite graduée.</p> <p>Résoudre une équation mise sous la forme $A.B = 0$, où A et B désignent deux expressions du premier degré de la même variable.</p> <p>Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation, une inéquation [ou un système de deux équations] du premier degré.</p>	<p>On pourra s'appuyer dans toute cette partie sur des activités déjà pratiquées dans les classes antérieures, notamment celles de tests par substitution de valeurs numériques à des lettres.</p> <p>L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier ordre de la même variable est, elle, hors programme.</p> <p>Les problèmes sont issus des différentes parties du programme. comme en classe de 4e, on dégagera à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.</p>

1 Equations du premier degré

Définitions :

Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée **inconnue** de l'équation.

Une **solution** de cette équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

Résoudre une équation, c'est en trouver **toutes** les solutions.

Par exemple $3x - 7 = 5$ est une équation, dont le **premier membre** (ce qui est à gauche du signe =) est $3x - 7$, et dont le **second membre** (ce qui est à droite du signe =, donc) est 5.

- ▶ 4 est une solution de l'équation $3x - 7 = 5$
car, lorsque je remplace l'inconnue x par 4 dans l'équation, l'égalité est vérifiée : $3 \times 4 - 7 = 12 - 7 = 5$
- ▶ 2 n'est pas une solution de l'équation $3x - 7 = 5$
car, lorsque je remplace x par 2, l'égalité n'est pas vérifiée : $3 \times 2 - 7 = 6 - 7 = -1 \neq 5!!$

Règles de manipulation des égalités :

Pour résoudre une équation, nous aurons besoin de la transformer, tout en s'assurant que la nouvelle équation obtenue après transformation possède exactement les mêmes solutions que l'équation initiale. Pour ce faire, nous avons deux règles à notre disposition :

Règle n°1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en **ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres** de l'équation.

Règle n°2 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en **multipliant (ou divisant) les deux membres** de l'équation **par un même nombre non nul**.

Nous traiterons ici des équations du premier degré à une inconnue x (ou s'y ramenant). Ce sont des équations qui, après ces transformations autorisées, peuvent s'écrire sous la forme $ax = b$, avec $a \neq 0$. Cette équation a alors une unique solution, qui est $\frac{b}{a}$.

Par exemple,

l'équation $3x - 5 = 7$ est une équation du premier degré : résolvons-la

► En utilisant la **règle 1**, on voit que l'on peut ajouter 5 aux deux membres de l'équation :

$$3x - 5 + 5 = 7 + 5, \text{ c'est-à-dire } 3x = 12.$$

► En utilisant la **règle 2**, on voit que l'on peut diviser par 3 chaque membre de l'équation :

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}, \text{ c'est à dire } x = 4.$$

► on conclut par une phrase : l'équation $3x - 7 = 5$ admet une unique solution, qui est 4.

2 Equations-produits

Définition :

Une **équation-produit** est une équation qui s'écrit sous la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ (*il peut y avoir plus de deux facteurs*)

Remarque : cette équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une équation du **second degré** ; en effet, si on développait le membre de gauche, l'inconnue x apparaîtrait avec une puissance 2. Prenons par exemple l'équation $(x + 1)(3x - 6) = 0$; si on développe le membre de gauche, on aboutit à l'équation $3x^2 - 3x - 6 = 0$. Mais nous ne savons pas encore, en Troisième, résoudre ce type d'équation... Comment faire ?

Propriété :

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul. Autrement dit, dire que " $A \times B = 0$ " équivaut à dire que " $A = 0$ ou $B = 0$ ".

Méthode : Ainsi, le produit $(ax + b)(cx + d)$ sera nul si, et seulement si, l'un des facteurs $((ax + b)$ ou $(cx + d))$ est nul : **$(ax + b)(cx + d) = 0$** si et seulement si **$ax + b = 0$** ou **$cx + d = 0$** .

On se ramène ainsi à la résolution de deux équations du premier degré!!

Propriété :

Les solutions de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ sont les solutions de chacune des équations $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$

Par exemple : résolvons l'équation $(3x - 7)(2x + 5) = 0$

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul.

$$3x - 7 = 0 \text{ ou } 2x + 5 = 0$$

$$3x = 7 \quad \text{ou} \quad 2x = -5$$

$$x = \frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5}{2}$$

Ainsi, l'équation $(3x - 7)(2x + 5) = 0$ admet deux solutions, qui sont $\frac{7}{3}$ et $-\frac{5}{2}$

3 Inéquations du premier degré

Définitions :

Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée **inconnue** de l'inéquation.

Une **solution** de cette inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.

Résoudre une inéquation, c'est en trouver **toutes** les solutions.

Par exemple $3x - 7 > 5$ est une inéquation, dont le **premier membre** (ce qui est à gauche du signe $>$) est $3x - 7$, et dont le **second membre** (ce qui est à droite du signe $>$, donc) est 5.

- ▶ 6 est une solution de l'inéquation $3x - 7 > 5$
car, lorsque je remplace l'inconnue x par 6 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée :
 $3 \times 6 - 7 = 18 - 7 = 11 > 5$
- ▶ 10 est une autre solution de l'inéquation $3x - 7 > 5$
car, lorsque je remplace l'inconnue x par 10 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée :
 $3 \times 10 - 7 = 30 - 7 = 23 > 5$
- ▶ 2 n'est pas une solution de l'inéquation $3x - 7 > 5$
car, lorsque je remplace x par 2, l'inégalité n'est pas vérifiée : $3 \times 2 - 7 = 6 - 7 = -1 \not> 5!!$

Règles de manipulation des inégalités :

Pour résoudre une inéquation, nous aurons besoin de la transformer, tout en s'assurant que la nouvelle inéquation obtenue après transformation possède exactement les mêmes solutions que l'inéquation initiale. Pour ce faire, nous avons trois règles à notre disposition :

Règle n°1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres** de l'inéquation.

Règle n°2 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **multipliant (ou divisant) les deux membres de l'inéquation par un même nombre strictement positif**.

Règle n°3 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **multipliant (ou divisant) les deux membres de l'inéquation par un même nombre strictement négatif**, à condition de **changer le sens de l'inégalité**.

Par exemple,

l'inéquation $3x - 5 > 7$ est une équation du premier degré : résolvons-la

▶ En utilisant la **règle 1**, on voit que l'on peut ajouter 5 aux deux membres de l'inéquation :

$$3x - 5 + 5 > 7 + 5$$

$$3x > 12.$$

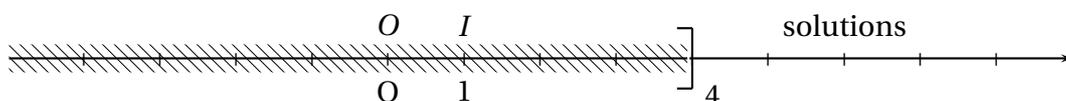
▶ En utilisant la **règle 2**, on voit que l'on peut diviser par 3 chaque membre de l'inéquation :

$$\frac{3x}{3} > \frac{12}{3}$$

$$x > 4.$$

▶ On conclut par une phrase : l'inéquation $3x - 7 > 5$ admet pour solutions les nombres strictement supérieurs à 4.

▶ On peut représenter l'ensemble des solutions sur un axe, en **hachurant la partie de la droite graduée constituée des nombres qui ne sont pas solutions** :



⚠ **Attention au sens du crochet !** Le crochet n'est pas tourné vers les solutions, car 4 n'est pas solution de l'inéquation $3x - 7 > 5$.